



研究与开发

## 基于增强低秩的多视图子空间聚类算法

张天啸<sup>1</sup>, 张永<sup>1,2</sup>, 刘文哲<sup>1</sup>

(1. 湖州师范学院信息工程学院, 浙江 湖州 313000;

2. 辽宁师范大学计算机与人工智能学院, 辽宁 大连 116033)

**摘要:** 多视图子空间聚类 (multi-view subspace clustering, MVSC) 因其能够有效融合多源异构数据而被广泛应用, 但其仍面临两大挑战: 噪声对亲和矩阵鲁棒性的影响以及捕获视图间一致性信息能力不足。为此, 提出了一种融合双重去噪与成对相似性思想的 MVSC 算法。首先, 该算法在数据处理初期采用双重去噪策略, 通过低通滤波器实现平滑去噪, 继而构建多步矩阵分解框架以实现低秩化去噪; 其次, 引入成对相似性思想, 通过构建视图间一致性约束来有效挖掘视图间的一致性信息; 最后, 采用基于增广拉格朗日乘子法 (augmented lagrange method, ALM) 求解目标函数。该算法在 7 个不同领域数据集上均表现出显著优势, 与其他算法相比, 该算法在准确度、归一化互信息和 F-score 指标上分别平均提升了 17.79%、20.72% 和 16.37%。其中 CESC 数据集的准确度达到了 0.862 9, 较高效、有效的一步式多视图聚类 (efficient and effective one-step multiview clustering, EEOMVC) 方法提升了 16.13%, 充分体现了该算法在多视图数据融合方面的优越性能。

**关键词:** 多视图学习; 子空间聚类; 矩阵分解; 低秩表示

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2026007

## Multi-view subspace clustering algorithm based on low-rank enhancement

Zhang Tianxiao<sup>1</sup>, Zhang Yong<sup>1,2</sup>, Liu Wenzhe<sup>1</sup>

1. School of Information Engineering, Huzhou University, Huzhou 313000, China

2. School Computer Science and Artificial Intelligence, Liaoning Normal University, Dalian 116033, China

**Abstract:** Multi-view subspace clustering (MVSC) is widely recognized for its effectiveness in integrating multi-source heterogeneous data, yet two critical challenges are identified: insufficient robustness of affinity matrices against noise and limited capability in capturing cross-view consistent information. To address these issues, a multi-view subspace

收稿日期: 2025-05-09; 修回日期: 2025-06-10

通信作者: 刘文哲, liuwenzhe@zjhu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61772252); 辽宁省教育厅科学研究经费资助项目 (No.LJKZ0965); 浙江省教育厅一般科研项目 (No.Y202456367, No.Y202456437); 湖州市自然科学基金资助项目 (No.2022GZ08, No.2023ZD2004, No.2024YZ39)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (No.61772252), The Scientific Research Foundation of the Education Department of Liaoning Province (No. LJKZ0965), The Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department (No.Y202456367, No.Y202456437), The Huzhou Natural Science Foundation (No.2022GZ08, No.2023ZD2004, No.2024YZ39)



clustering algorithm was proposed by integrating dual denoising mechanisms with pairwise similarity principles. Firstly, a dual denoising strategy was designed during the initial data processing stage, where smooth denoising was achieved through low-pass filters, followed by low-rank denoising via a multi-step matrix decomposition framework. Subsequently, pairwise similarity principles were introduced, and inter-view consistency constraints were systematically constructed to effectively explore shared information across views. Finally, an optimization framework was developed using the augmented Lagrangian method (ALM). The proposed algorithm demonstrates significant advantages across seven datasets from different domains. Compared with other algorithms, it achieves average improvements of 17.79% in accuracy, 20.72% in normalized mutual information, and 16.37% in F-score metrics. Particularly on the CESC dataset, the algorithm attains an ACC score of 0.862 9, representing a 16.13% improvement over the efficient and effective one-step multiview clustering (EEMVC), which fully demonstrates its superior performance in multi-view data fusion.

**Key words:** multi-view learning, subspace clustering, matrix decomposition, low-rank representation

## 0 引言

随着大数据时代的到来,数据对象的描述维度呈现多元化趋势。在医疗影像分析、社交网络挖掘等实际场景中,单视图数据很难全面刻画复杂对象的本质特征。例如,在阿尔茨海默病的早期诊断中,单一的脑部磁共振成像(magnetic resonance imaging, MRI)图像可能遗漏功能代谢信息,而结合正电子发射型计算机断层显像(positron emission computed tomography, PET)的多视图数据<sup>[1]</sup>则能通过结构性与功能性特征的互补提升诊断可靠性,这种多源数据间的异构性使得多视图数据分析成为实现信息协同的关键技术路径。然而,多视图数据的整合面临两大挑战:其一,不同视图的特征尺度与语义层次差异显著(如图像像素与文本关键词的不可比性);其二,无监督场景下缺乏标签引导,导致传统融合方法(如简单加权平均或特征拼接)难以平衡视图间的互补性与噪声干扰。在多视图数据分析中,当需要探索潜在结构且数据标签稀缺时,多视图聚类(multi-view clustering, MVC)<sup>[2-3]</sup>因不需要标签即能探索数据的潜在关联,降低了人工成本。早期的MVC方法将所有视图数据拼接成一个全尺寸视图,然后将其作为单视图数据,这种简单的拼接方式无法捕获视图间的全局性信息。高效整合不同视图的信息仍是MVC的

关键问题,涉及视图内的去噪、视图间一致性信息的捕获和视图间互补性信息等方向。

近年来,为满足实际应用需求,许多多视图聚类方法被提出,如基于图的方法<sup>[4]</sup>、基于核<sup>[5]</sup>的方法和基于子空间<sup>[6-7]</sup>的方法。在基于图的多视图聚类方法里,文献[8]提出一种自适应多视图融合聚类方法,该方法通过加权融合与约束优化生成聚类结果,但存在捕获视图间互补信息不足和抗噪能力弱的问题。对此,文献[9]提出协同学习框架,该方法创新性地统一模型中同时捕捉视图间一致性与互补性,实现单视图分解与视图间融合联合优化。但传统基于图聚类的方法通常直接依赖原始特征构建相似图,导致最终进行聚类的亲和矩阵对噪声点非常敏感。基于核的多视图聚类方法通过核空间非线性映射与自适应多核融合机制,克服了图聚类中直接使用原始特征构建相似图的问题。在基于核的方法里,文献[10]提出自适应多核聚类方法,该方法通过协同优化集群专属核组合与聚类结构,采用softmax激活实现高效梯度优化。尽管该方法通过多核机制实现了特征选择,但其基于线性核组合的固有框架限制了其对复杂非线性流形结构的适应性。为此,文献[11]提出了一种基于低秩张量核范数和核技巧的多视图聚类方法,该方法通过张量奇异值分解联合学习表示张量与亲和矩阵,在特征空间中

建模视图间的高阶非线性相关性。但基于核聚类的方法的效能与核函数的选择呈现显著相关性,在应用场景中,关于核函数的最优选取策略仍未形成系统化的理论框架。而基于子空间的聚类通过“自表示学习+亲和矩阵构建”的两步框架,不仅减弱了亲和矩阵对噪声的敏感度,而且不需要核函数映射,可以直接学习共享子空间。最早的自表示子空间聚类方法之一是稀疏子空间聚类<sup>[12]</sup>,它通过 $L_1$ 范数约束图矩阵,使图尽可能稀疏,这在一定程度上确保了数据损坏时仍能正常恢复子空间<sup>[13]</sup>。低秩表示<sup>[14]</sup>将自表示学习得到的图矩阵执行核范数约束,使其尽可能低秩。这种方法揭示了数据的相关性结构,并通过低秩约束恢复子空间结构<sup>[15]</sup>。然而,传统子空间聚类方法受限于单一视图建模,未能有效捕捉视图间数据的一致性等相关特征,在处理高维度、跨视图数据时,不仅容易受到视图噪声干扰,还难以有效捕捉视图间的一致性信息,促使研究者开发能在统一低维空间中整合多视图特征的新方法。为此,多视图子空间聚类(multi-view subspace clustering, MVSC)<sup>[16]</sup>应运而生。研究者提出了多种有效的MVSC方法,文献[17]将经典的子空间聚类扩展到多视图情况,不仅对每个视图执行子空间聚类,而且还保证了不同视图之间的指标一致性。文献[18]提出了一种新的MVSC方法,该方法使用希尔伯特-施密特独立性准则来利用不同视图之间的互补性,处理隐藏在多视图数据中的非线性结构,但其过度依赖原始数据质量,且仅通过局部优化抑制冗余信息。鉴于此,文献[19]提出了一种在共享嵌入空间中划分多视图特征的新方法,该方法通过潜在嵌入空间的全局建模与联合优化,有效突破了仅通过局部优化抑制冗余信息的局限性。同时,为了处理大规模数据的问题,文献[20]提出了一种有效的基于子空间的方法,其核心创新基于锚图思想。该方法先为每个视图学习低维图结构以压缩数据规模,再设计跨视图

图融合策略。之后,文献[21]通过统一的锚点选择策略开发了一种大规模的基于子空间的方法,该方法将子空间聚类和统一锚点选择两个重要任务集成到联合框架中。文献[22]通过自表达方法构建各视图相似图并融合为具有列和约束性质的共识图,结合拉普拉斯矩阵的秩约束优化聚类结构。文献[23]提出了一种基于三重策略的MVC方法,该方法通过融合拉普拉斯图同时探索视图间的一阶和二阶结构信息,并设计标签融合方案消除噪声与冗余信息,结合自适应回归学习挖掘视图间的互补信息。

基于上述研究,如何获得更清晰、更具有鲁棒性的亲和矩阵是子空间自表示学习过程中的一个关键点;此外,在挖掘不同视图之间的结构一致性上普遍存在不足。为此,本文提出一种基于增强低秩的MVSC方法,其创新点可凝练为以下3个部分。

(1) 设计双重去噪部分,先通过低通滤波器实现数据平滑去噪,再构建多步矩阵分解框架进行低秩化二次去噪,形成“平滑+低秩”的双重噪声抑制机制,显著提升算法对噪声的鲁棒性。

(2) 引入了成对相似性思想,使得不同视图的聚类结构趋向一致,从而捕获视图间的一致性信息。

(3) 设计增广拉格朗日乘子法框架,将滤波去噪、多步矩阵分解与成对相似性思想提取一致性信息整合为联合优化问题,通过变量交替更新策略实现高效求解,保证了算法的收敛性。

## 1 相关工作

### 1.1 自表示学习

自表示学习是子空间聚类中最流行的方法之一。在自表示学习中,关键是从具有低秩约束的原始数据矩阵中恢复低维子空间结构。具体来说,该方法试图找到一个低秩子空间表示,它反映了给定数据样本之间的潜在相关性,表示如下:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{E}} (\mathbf{Z})_* + \lambda (\mathbf{E})_{2,1} \\ \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{E} \end{cases} \quad (1)$$



其中,  $\mathbf{Z}$  为含有主要信息结构的子空间表示矩阵,  $(\mathbf{Z})_*$  表示矩阵  $\mathbf{Z}$  上的核范数, 用于约束  $\mathbf{Z}$  的低秩特性;  $\mathbf{E}$  为误差矩阵,  $(\mathbf{E})_{2,1}$  是误差矩阵上的  $L_{2,1}$  范数, 用于对噪声或异常值施加结构化稀疏约束;  $\lambda$  是正则化参数, 用于平衡低秩表示和噪声之间的权重。

### 1.2 鲁棒主成分分析

一般的原始数据矩阵  $\mathbf{X}$  包含结构信息, 也包含噪声, 那么可以将这个矩阵分解为两个矩阵相加:  $\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{E}$ , 其中  $\mathbf{A}$  是低秩的,  $\mathbf{E}$  是稀疏的, 鲁棒主成分分析 (robust principal component analysis, RPCA) [24] 将原始数据分为子空间表示和噪声矩阵, 表示如下:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{A}, \mathbf{E}} (\mathbf{A})_* + \lambda (\mathbf{E})_{2,1} \\ \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{E} \end{cases} \quad (2)$$

与自表示学习相比, 两者的主要区别在于数据表示和噪声处理的方式不同。自表示学习的目标是将原始数据  $\mathbf{X}$  表示为自身与子空间表示的乘积, 并同时为噪声施加稀疏约束。自表示学习的核心思想是通过给定的原始数据  $\mathbf{X}$ , 学习数据的低秩表示  $\mathbf{Z}$ , 从而更好地捕捉数据的全局结构信

息。相比之下, RPCA 直接对原始数据  $\mathbf{X}$  进行低秩分解, 而不需要额外的系数矩阵  $\mathbf{Z}$ , 因此在计算上更加简单高效。此外, RPCA 对噪声的鲁棒性更强, 特别适用于噪声分布较为稀疏的场景。

本文算法流程如图 1 所示。

## 2 方法提出

### 2.1 基于低通滤波器的平滑去噪方法

为了促进后续聚类, 本文所提算法首先使用了一种过滤方法, 通过该方法实现了平滑表示、去除噪声, 相邻节点的特征值更加接近, 并保留了图像中的结构。在图信号处理中, 低通滤波器被广泛用于保留图结构中的低频信号 (即平滑信号), 同时抑制高频信号 (即噪声和异常值)。对于多视图数据, 每个视图可以看作一个图信号, 其中节点表示样本数据, 边表示样本之间的相似性。通过低通滤波器, 可以有效去除视图中的噪声, 同时保留数据的全局结构信息。首先, 构造拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_s^{(v)} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{(v)\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{(v)} \mathbf{D}^{(v)\frac{1}{2}}$ , 其中  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为相似度矩阵 (对原始数据使用  $k$ -近邻算法获得),  $\mathbf{D}^{(v)}$  为度矩阵,  $\mathbf{D}^{(v)}_{ii} =$

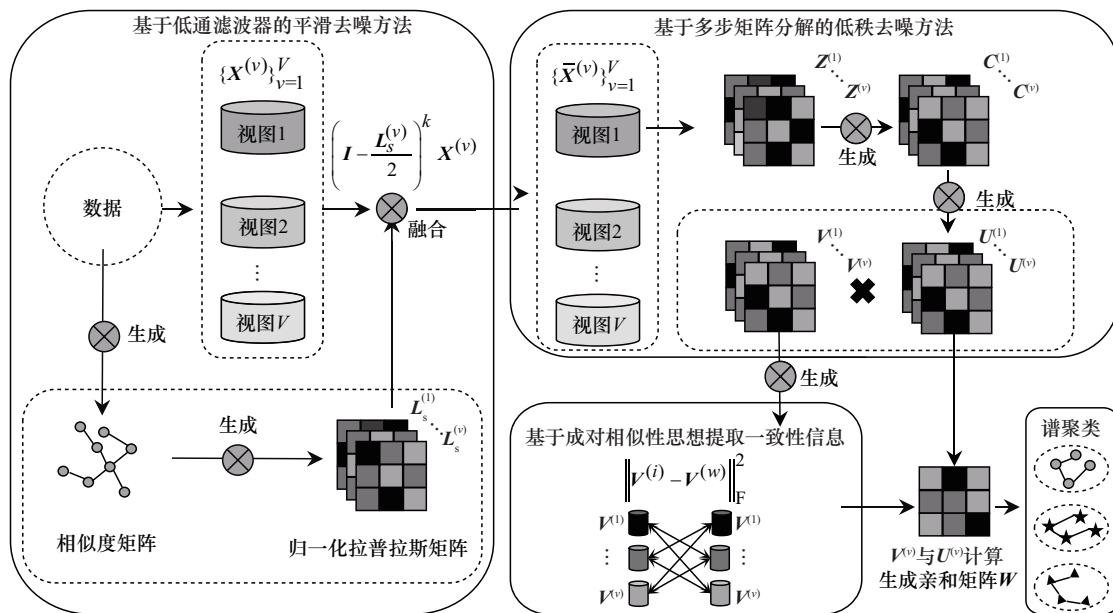


图 1 算法流程

$\sum_{j=1}^n \mathbf{W}^{(v)}_{ij}$ 。本文所提算法使用的滤波器频率响应函数为：

$$h(\lambda_i^{(v)}) = \left( \mathbf{I} - \frac{\lambda_i^{(v)}}{2} \right)^k \quad (3)$$

其中， $\lambda_i^{(v)}$  是第  $v$  个视图的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_s^{(v)}$  的第  $i$  个特征值，表示频率， $k$  为滤波器阶数。

滤波器的原理如下：当  $\lambda_i^{(v)}$  较小（低频信号）时， $h(\lambda_i^{(v)})$  接近 1，滤波器保留这些信号；当  $\lambda_i^{(v)}$  较大（高频信号）时， $h(\lambda_i^{(v)})$  接近 0，滤波器抑制这些信号。通过调整  $k$  的值，可以控制滤波器的衰减速度： $k$  越大，高频信号的衰减越快，滤波器的低通特性越强； $k$  越小，滤波器的低通特性越弱，保留更多高频信号。其扩展到矩阵形式可表示为：

$$\left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{L}_s^{(v)}}{2} \right)^k \quad (4)$$

这种形式可以直接在图的拓扑结构上进行操作，无须显式计算特征分解，并且可以通过矩阵乘法实现高效的迭代滤波。本文平滑表示通过以下方式实现：

$$\bar{\mathbf{X}}^{(v)} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{L}_s^{(v)}}{2} \right)^k \mathbf{X}^{(v)} \quad (5)$$

其中， $\mathbf{X}^{(v)} \in \mathbf{R}^{d \times n}$  为第  $v$  个视图的原始数据矩阵， $d$  为特征维度， $n$  为样本数， $\bar{\mathbf{X}}^{(v)} \in \mathbf{R}^{d \times n}$  为滤波后的原始数据矩阵。原始数据经过平滑处理之后，将为自表示学习提供更好的输入。

## 2.2 基于多步矩阵分解的低秩去噪方法

在多视图自表示学习方法中，核心目标是通过施加低秩约束从原始数据矩阵中恢复潜在的低维子空间结构。具体而言，该方法旨在寻找一个能够反映给定数据样本间潜在相关性的低秩子空间表示。给定一组数据样本  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ，若仅考虑所有视图间的一致性，则不同视图的子空间表示应共享相同的模式。当不只考虑单个视

图内部的低秩结构，而且数据样本经过平滑处理后，多视图数据的自表示计算式可表示为：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}_X^{(v)}} \left\| \mathbf{E}_X^{(v)} \right\|_{2,1} + \alpha \left\| \mathbf{Z}^{(v)} \right\|_* \\ \text{s.t. } \bar{\mathbf{X}}^{(v)} = \bar{\mathbf{X}}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}_X^{(v)} \end{cases} \quad (6)$$

其中， $\mathbf{Z}^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为第  $v$  个视图的子空间表示， $\mathbf{E}_X^{(v)} \in \mathbf{R}^{d \times n}$  为重构原始数据的误差矩阵。

在扩展到多视图的过程中，因为原始的多视图数据通常包含噪声，式 (6) 的子空间表示矩阵  $\mathbf{Z}^{(v)}$  不够清晰。为了使子空间表示矩阵学习更清晰、更可靠，本文借用 RPCA 的思想，将 RPCA 扩展到多视图，并使用式 (6) 得到的  $\mathbf{Z}^{(v)}$  作为 RPCA 的输入，将  $\mathbf{Z}^{(v)}$  分解为  $\mathbf{C}^{(v)}$  和  $\mathbf{E}_z^{(v)}$ ，本文 RPCA 被应用为：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{C}^{(v)}, \mathbf{E}_z^{(v)}} \sum_{v=1}^V \left\| \mathbf{C}^{(v)} \right\|_* + \lambda \sum_{v=1}^V \left\| \mathbf{E}_z^{(v)} \right\|_{2,1} \\ \text{s.t. } \mathbf{Z}^{(v)} = \mathbf{C}^{(v)} + \mathbf{E}_z^{(v)} \end{cases} \quad (7)$$

其中， $\mathbf{C}^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为重构  $\mathbf{Z}^{(v)}$  所得的子空间表示， $\mathbf{E}_z^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为重构子空间表示  $\mathbf{Z}^{(v)}$  的误差矩阵。

式 (7) 揭示了各个视图中所需要的低秩结构。然而，这种 RPCA 公式存在非常高的迭代成本。为了提高它在解决大规模实际问题时的可扩展性，本文进一步结合低秩矩阵分解的思想，将  $\mathbf{C}^{(v)}$  分解为两个小矩阵，如下：

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{(v)} = \mathbf{U}^{(v)} \mathbf{V}^{(v)}, \forall v \\ \mathbf{U}^{(v)\top} \mathbf{U}^{(v)} = \mathbf{I}, \forall v \end{cases} \quad (8)$$

其中， $\mathbf{U}^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示第  $v$  个视图中的正交矩阵，具有正交列， $\mathbf{V}^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示第  $v$  个视图中的潜在表示，它能够从矩阵  $\mathbf{C}^{(v)}$  编码低秩属性。

## 2.3 基于成对相似性思想提取一致性信息

令  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  和  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  是具有相同维度的两个矩阵，本文将它们分别分解为更小的矩阵，即  $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{N}$  和  $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{M}$ ，其中， $\mathbf{H}, \mathbf{G} \in \mathbf{R}^{m \times d}$  和  $\mathbf{N}, \mathbf{M} \in \mathbf{R}^{d \times n}$ 。如果矩阵  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{G}$  有正交列， $\|\mathbf{N}\|_* = \|\mathbf{M}\|_*$



成立, 那么有  $\|A\|_* = \|B\|_*$ 。

此引理表明, 不同视图之间的结构一致性可以通过不同视图中的潜在表示来衡量。受此启发, 本文通过以下方法提取到一致性信息:

$$\min_{\{V^{(v)}\}_{v=1}^V} \frac{1}{V-1} \sum_{\substack{v=1, \\ i \neq w}}^V \|V^{(i)} - V^{(w)}\|_F^2 \quad (9)$$

由于成对相似性的思想, 上述一致性项有效地衡量了不同潜在表示的结构一致性, 本文可以按如下方式实现:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{E_X^{(v)}, E_Z^{(v)}, Z^{(v)}, C^{(v)}, V^{(v)}} \sum_{v=1}^V \|E_X^{(v)}\|_{2,1} + \lambda_1 \sum_{v=1}^V \|E_Z^{(v)}\|_{2,1} + \\ \lambda_2 \|V^{(v)}\|_* + \frac{\lambda_3}{V-1} \sum_{\substack{v=1, \\ i \neq w}}^V \|V^{(i)} - V^{(w)}\|_F^2 \\ \text{s.t. } \bar{X}^{(v)} = \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} + E_X^{(v)} \\ Z^{(v)} = C^{(v)} + E_Z^{(v)} \\ C^{(v)} = U^{(v)} V^{(v)} \\ U^{(v)\top} U^{(v)} = I \end{array} \right. \quad (10)$$

其中,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 是3个正平衡参数,  $i, j \in \{1, 2, \dots, V\}$ 。本文所提出的目标函数对原始数据进行了去噪处理, 保留了每个视图中的低秩结构, 同时发现不同视图之间的结构一致性, 从而以有效的方式提高MVSC的性能。随后, 可以确定亲和矩阵  $W$ , 它是谱聚类的输入:

$$W = \frac{\left| \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V U^{(v)} V^{(v)} \right| + \left| \left( \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V U^{(v)} V^{(v)} \right)^\top \right|}{2} \quad (11)$$

## 2.4 优化

基于增广拉格朗日乘子法 (augmented Lagrange method, ALM) 的框架, 本文提出了一种有效的优化算法来求解式 (10) 中的最小化问题。首先, 对应的增广拉格朗日函数公式如下:

$$L(V^{(v)}, U^{(v)}, Z^{(v)}, C^{(v)}, E_X^{(v)}, E_Z^{(v)}) = \sum_{v=1}^V \left( E_X^{(v)} \right)_{2,1} +$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \sum_{v=1}^V \left( E_Z^{(v)} \right)_{2,1} + \lambda_2 \left( V^{(v)} \right)_* + \\ & \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_1^{(v)}, \bar{X}^{(v)} - \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} - E_X^{(v)} \right) + \\ & \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_2^{(v)}, Z^{(v)} - C^{(v)} - E_Z^{(v)} \right) + \\ & \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_3^{(v)}, C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)} \right) + \\ & \frac{\lambda_3}{V-1} \sum_{\substack{v=1, \\ i \neq w}}^V \|V^{(i)} - V^{(w)}\|_F^2 \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $Y_1$ 、 $Y_2$ 、 $Y_3$  是拉格朗日乘数,  $\Phi(A, B) = \langle A, B \rangle + \frac{\mu}{2} \|B\|_F^2$ 。式 (12) 中所有变量的求解过程如下。

### 2.4.1 优化 $E_X^{(v)}$

求解变量  $E_X^{(v)}$ , 式 (12) 可简化为:

$$\min_{E_X^{(v)}} \sum_{v=1}^V \left( \|E_X^{(v)}\|_{2,1} + \Phi \left( Y_1^{(v)}, \bar{X}^{(v)} - \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} - E_X^{(v)} \right) \right) \quad (13)$$

式 (13) 可以进一步写为:

$$\min_{E_X^{(v)}} \left( \|E_X^{(v)}\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \|E_X^{(v)} - \Gamma_{E_X}^{(v)}\|_F^2 \right) \quad (14)$$

其中,  $\Gamma_{E_X}^{(v)}$  表示如下:

$$\Gamma_{E_X}^{(v)} = \bar{X}^{(v)} - \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} + \frac{Y_1^{(v)}}{\mu} \quad (15)$$

求解  $E_X^{(v)}$  的详细方法可以参照文献[25]。

### 2.4.2 优化 $E_Z^{(v)}$

求解变量  $E_Z^{(v)}$ , 式 (12) 可简化为:

$$\min_{E_Z^{(v)}} \sum_{v=1}^V \left( \|E_Z^{(v)}\|_{2,1} + \Phi \left( Y_2^{(v)}, Z^{(v)} - C^{(v)} - E_Z^{(v)} \right) \right) \quad (16)$$

式 (16) 可以进一步修改为:

$$\min_{E_Z^{(v)}} \left( \|E_Z^{(v)}\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \|E_Z^{(v)} - \Gamma_{E_Z}^{(v)}\|_F^2 \right) \quad (17)$$

其中,  $\Gamma_{E_Z}^{(v)}$  表示如下:

$$\Gamma_{E_Z}^{(v)} = Z^{(v)} - C^{(v)} + \frac{Y_2^{(v)}}{\mu} \quad (18)$$

该问题解法与式 (13) ~ 式 (15) 解法相同。

### 2.4.3 优化 $Z^{(v)}$

求解变量  $Z^{(v)}$ , 式 (12) 可简化为:

$$\min_{Z^{(v)}} \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_1^{(v)}, \bar{X}^{(v)} - \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} - E_X^{(v)} \right) + \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_2^{(v)}, Z^{(v)} - C^{(v)} - E_z^{(v)} \right) \quad (19)$$

对式 (19) 的变量  $Z^{(v)}$  求导并将其设为零, 有:

$$Z^{(v)} = \text{temp\_a}^{-1} \times \text{temp\_b} \quad (20)$$

其中,  $Z^{(v)} = \text{temp\_a}^{-1} \cdot \text{temp\_b}$  是一个 Sylvester 方程<sup>[26]</sup>,  $\text{temp\_a}$  和  $\text{temp\_b}$  的具体计算式如下:

$$\text{temp\_a} = \mu \left[ (\bar{X}^{(v)})^T \bar{X}^{(v)} + I \right] \quad (21)$$

$$\text{temp\_b} = (\bar{X}^{(v)})^T Y_1^{(v)} + \mu (\bar{X}^{(v)})^T \bar{X}^{(v)} - \mu (\bar{X}^{(v)})^T E_X^{(v)} - Y_2^{(v)} + \mu C^{(v)} + \mu E_z^{(v)} \quad (22)$$

### 2.4.4 优化 $C^{(v)}$

求解变量  $C^{(v)}$ , 式 (12) 可简化为:

$$\min_{C^{(v)}} \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_2^{(v)}, Z^{(v)} - C^{(v)} - E_z^{(v)} \right) + \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_3^{(v)}, C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)} \right) \quad (23)$$

同样, 有:

$$C^{(v)} = \text{temp\_c}^{-1} \times \text{temp\_d} \quad (24)$$

其中,  $\text{temp\_c}$  和  $\text{temp\_d}$  的具体计算式如下:

$$\text{temp\_c} = 2\mu I \quad (25)$$

$$\text{temp\_d} = Y_2^{(v)} - Y_3^{(v)} + \mu Z^{(v)} - \mu E_z^{(v)} + \mu U^{(v)} V^{(v)}$$

### 2.4.5 优化 $U^{(v)}$

求解变量  $U^{(v)}$ , 式 (12) 可以简化为:

$$\begin{cases} \min_{U^{(v)}} \sum_{v=1}^V \Phi \left( Y_3^{(v)}, C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)} \right) \\ \text{s.t. } U^{(v)T} U^{(v)} = I \end{cases} \quad (26)$$

式 (26) 可以进一步修改为:

$$\begin{cases} \min_{U^{(v)}} \sum_{v=1}^V \frac{\mu}{2} \left\| \left( C^{(v)} + \frac{Y_3^{(v)}}{\mu} \right) - V^{(v)T} U^{(v)} \right\|_F^2 \\ \text{s.t. } U^{(v)T} U^{(v)} = I \end{cases} \quad (27)$$

求解  $U^{(v)}$  的详细方法可以参考文献[27].

### 2.4.6 优化 $V^{(v)}$

求解变量  $V^{(v)}$ , 式 (12) 可以简化为:

$$\min_{V^{(v)}} \lambda_2 \|V^{(v)}\|_* + \frac{\lambda_3}{V-1} \sum_{i \neq w} \|V^{(i)} - V^{(w)}\|_F^2 + \langle Y^{(v)}, C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)}\|_F^2 \quad (28)$$

式 (28) 可以进一步修改为:

$$\min_{V^{(v)}} \frac{\lambda_1}{2(\mu + \lambda_3)} \|V^{(v)}\|_* + \frac{1}{2} \left\| V^{(v)} - \frac{1}{\mu + \lambda_3} H^{(v)} \right\|_F^2 \quad (29)$$

$H^{(v)}$  的具体计算式如下:

$$H^{(v)} = \mu L^{(v)T} \left( Z^{(v)} + \frac{1}{\mu} Y^{(v)} \right) + \frac{\lambda_2}{V-1} \sum_{i \neq w} C^{(w)} \quad (30)$$

上述问题可以通过奇异值分解阈值 (singular value threshold, SVT) 方法<sup>[28]</sup>解决.

### 2.4.7 优化 $Y$ 和 $\mu$

优化  $Y$  和  $\mu$  可得:

$$\begin{cases} Y_1^{(v)} = Y_1^{(v)} + \mu (\bar{X}^{(v)} - \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} - E_X^{(v)}) \\ Y_2^{(v)} = Y_2^{(v)} + \mu (Z^{(v)} - C^{(v)} - E_z^{(v)}) \\ Y_3^{(v)} = Y_3^{(v)} + \mu (C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)}) \\ \mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max}) \end{cases} \quad (31)$$

其中,  $\rho$  是  $\mu$  的迭代步骤.

总的来说, 本文算法流程如下.

**算法** 基于增强低秩的 MVSC 算法

**输入** 多视图数据集  $\{X^{(v)}\}_{v=1}^V$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$

和滤波器阶数  $k$ ;

滤波器过滤原始数据生成  $\{\bar{X}^{(v)}\}_{v=1}^V$ ;

当没有收敛时:

通过式 (13) 优化  $E_X^{(v)}$ ;

通过式 (16) 优化  $E_z^{(v)}$ ;

通过式 (19) 优化  $Z^{(v)}$ ;

通过式 (23) 优化  $C^{(v)}$ ;

通过式 (26) 优化  $U^{(v)}$ ;



通过式 (28) 优化  $V^{(v)}$ ;

通过式 (31) 优化  $Y$  和  $\mu$ ;

检查收敛条件:  $\|\bar{X}^{(v)} - \bar{X}^{(v)} Z^{(v)} - E_x^{(v)}\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\|Z^{(v)} - C^{(v)} - E_z^{(v)}\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\|C^{(v)} - U^{(v)} V^{(v)}\|_\infty < \varepsilon$ ;

end

通过式 (11) 构造亲和矩阵  $W$ ;

输出 将  $W$  放入谱聚类, 得到聚类结果。

### 3 实验与分析

本文用 7 个数据集进行了全面的实验以评估算法的有效性。具体来说, 本文通过与其他方法的性能对比、消融实验、收敛性分析、参数敏感性分析和数据可视化对聚类性能进行验证。

#### 3.1 实验设置

本文选择 7 个不同类型的多视图数据集, 实验数据集涵盖多领域, 包括: CESC、YALE32、3sources、Washington、BRCA、BDGP 及 Cora。数据集详细信息见表 1。

#### 3.2 对比方法

本文将该算法与以下 7 种 MVC 方法进行了比较: 多视图共识图聚类 (multiview consensus graph clustering, MCGC) 方法<sup>[29]</sup>通过代价函数正则化多视图间的一致性并施加拉普拉斯矩阵秩约束; 基于鲁棒多原型表示的细粒度多视图聚类 (fine-grained multi-view clustering with robust multi-prototypes representation, FgMVC) 方法<sup>[30]</sup>采用细

粒度样本划分减少子群重叠; 包容性诱导的自适应图学习多视图聚类 (inclusivity induced adaptive graph learning for multi-view clustering, IIAGL) 方法<sup>[31]</sup>基于包容性图学习提取共享与互补信息; 高效、有效的一步式多视图聚类 (efficient and effective one-step multiview clustering, EEOMVC) 方法<sup>[32]</sup>利用锚图构建潜在分区以适配大规模数据; 伪标签引导的集体矩阵分解多视图聚类 (pseudo-label guided collective matrix factorization for multi-view clustering, PLCMF) 方法<sup>[33]</sup>通过伪标签引导集体矩阵分解联合学习表示与聚类结构; 通过显隐视图自动加权组合的完整多视图子空间聚类 (complete multi-view subspace clustering via auto-weighted combination of visible and latent views, CMVSC) 方法<sup>[34]</sup>融合可见/潜在视图子空间聚类并引入低秩张量约束及自动加权; 考虑高阶一致性的多视图聚类 (consider high-order consistency for multi-view clustering, CHOC-MVC) 方法<sup>[35]</sup>则结合自表达学习构建一致图张量与特定视图的数据, 利用高阶结构优化谱聚类亲和矩阵。

#### 3.3 评估指标

在聚类任务中, 本文选择了 3 个具有代表性的评估指标: 准确度 (accuracy, ACC)、归一化互信息 (normalized mutual information, NMI) 和 F-score。

ACC 的定义如下:

$$ACC = \frac{\sum_{i=1}^n \delta(\text{map}(r_i), g_i)}{n} \quad (32)$$

表 1 数据集详细信息

数据集	样本数	视图数	样本种类数	特征数	内容信息
CESC	124	4	3	2 000、2 000、311、219	124 例宫颈癌患者多组学数据
YALE32	165	3	15	30、14、30	15 人多表情人脸图
3sources	169	3	6	3 560、3 631、3 068	BBC 等三大媒体 948 篇主题新闻
Washington	230	2	5	230、1 703	多角度人体姿态图像与骨骼注释视频
BRCA	398	4	4	2 000、2 000、278、212	398 例乳腺癌患者多组学数据
BDGP	2 500	2	5	1 750、79	5 类果蝇胚胎的 2 500 张多特征图像
Cora	2 708	2	7	1 433、2 708	2 708 篇论文数据, 含词频与引用关系

其中,  $n$  为样本总数,  $\text{map}(r_i)$  是一个映射函数, 它允许聚类标签  $r_i$  与数据的真实标签  $g_i$  标签紧密匹配,  $\delta(\text{map}(r_i), g_i)$  是一个统计函数, 如果  $\text{map}(g_i)$  等于  $g_i$ , 则返回 1, 否则返回 0。NMI 定义如下:

$$\text{NMI}(S, R) = \frac{\sum_{s_i \in S, r_j \in R} p(s_i, r_j) \ln \frac{p(s_i, r_j)}{p(s_i)p(r_j)}}{\max(H(S), H(R))} \quad (33)$$

其中,  $H(S)$  和  $H(R)$  是不同簇  $S$  和  $R$  的熵,  $p(s_i)$  和  $p(r_j)$  是边际概率密度函数,  $p(s_i, r_j)$  是  $s_i$  和  $r_j$  的联合概率函数。

F-score 定义如下:

$$\text{F-score} = \left(1 + \mu^2\right) \frac{\text{Precision} \times \text{Recall}}{\mu^2 \times \text{Precision} + \text{Recall}} \quad (34)$$

其中,  $\text{Precision} = \frac{\text{CP}}{\text{CP} + \text{WP}}$ ,  $\text{Recall} = \frac{\text{CP}}{\text{WP} + \text{WN}}$ 。CP、WP 和 WN 分别表示真阳性簇的数量、假阳性簇、

假阴性簇和假阴性样本, 而  $\mu$  是平衡精度和召回率重要性的权重。

对于所有指标, 其值越高表示相应算法的性能越好。

### 3.4 结果分析

为验证算法有效性, 本文在 7 个数据集上与主流方法进行对比实验。7 个数据集上的 ACC、NMI 和 F-score 分别见表 2~表 4, 其中最佳结果用加粗表示。本文所提方法在 3 个指标上均显著优于对比方法: 在 CESC 数据集上 ACC 较 MCGC、PLCMF、CHOC-MVC 分别提升 17.6%、42.7%、30.5%; 在 Washington 数据集上较 EEOMVC、Fg-MVC、CHOC-MVC 分别提高 12.8%、32.4%、5.9%。该方法在 MVSC 中展现出显著优势, 其性能提升源于 3 个方面创新: 设计双重去噪对数据进行低秩化; 引入成对相似性思想提取视图间一

表 2 7 个数据集上的 ACC

算法	ACC						
	CESC	YALE32	3sources	Washington	BRCA	BDGP	Cora
EEOMVC	0.701 6	1	0.698 2	0.552 1	0.630 7	0.604 0	0.532 1
FgMVC	0.592 6	0.981 8	0.402 4	0.469 6	0.610 6	0.299 2	0.293 6
IIAGL	0.782 3	1	0.775 0	0.560 8	0.675 9	0.940 8	0.629 6
MCGC	0.733 9	0.993 9	0.533 0	0.539 1	0.613 1	0.585 2	0.344 9
PLCMF	0.604 8	0.921 2	0.704 0	0.547 8	0.625 6	0.694 4	0.345 6
CMVSC	0.565 0	1	0.508 0	0.554 0	0.435 0	0.966 0	0.293 0
CHOC-MVC	0.661 3	1	0.804 7	0.587 0	0.590 5	0.931 6	0.457 5
本文算法	<b>0.862 9</b>	<b>1</b>	<b>0.881 7</b>	<b>0.621 7</b>	<b>0.733 7</b>	<b>0.987 6</b>	<b>0.714 9</b>

表 3 7 个数据集上的 NMI

算法	NMI						
	CESC	YALE32	3sources	Washington	BRCA	BDGP	Cora
EEOMVC	0.370 4	1	0.652 3	0.333 3	0.339 5	0.444 7	0.408 6
FgMVC	0.541 6	0.984 6	0.147 4	0.047 9	0.347 7	0.078 2	0.010 1
IIAGL	0.522 6	1	0.707 0	0.277 1	0.412 7	0.851 1	0.455 1
MCGC	0.442 8	0.992 3	0.307 0	0.112 2	0.285 0	0.336 6	0.127 0
PLCMF	0.280 3	0.965 9	0.596 0	0.300 4	0.327 8	0.500 8	0.140 1
CMVSC	0.141 0	1	0.258 0	0.351 0	0.025 0	0.921 0	0.212 5
CHOC-MVC	0.425 4	1	0.669 3	0.304 1	0.279 1	0.823 3	0.293 9
本文算法	<b>0.591 4</b>	<b>1</b>	<b>0.756 4</b>	<b>0.356 9</b>	<b>0.455 8</b>	<b>0.959 6</b>	<b>0.520 0</b>



表4 7个数据集上的F-score

算法	F-score						
	CESC	YALE32	3sources	Washington	BRCA	BDGP	Cora
EEOMVC	0.560 2	1	0.635 3	0.539 1	0.660 8	0.518 0	0.475 6
FgMVC	0.510 1	0.965 6	0.241 4	0.474 6	0.592 8	0.324 5	0.296 5
IIAGL	0.671 6	1	0.724 6	0.503 3	0.545 1	0.887 5	0.517 9
MCGC	0.612 2	0.987 3	0.483 0	0.443 9	0.593 8	0.426 8	0.268 7
PLCMF	0.500 1	0.920 7	0.691 0	0.487 5	0.518 6	0.551 3	0.247 1
CMVSC	0.511 0	1	0.382 0	0.503 0	0.457 0	0.933 0	0.205 6
CHOC-MVC	0.571 1	1	0.700 4	0.533 2	0.475 3	0.872 3	0.339 4
本文算法	<b>0.763 0</b>	<b>1</b>	<b>0.800 6</b>	<b>0.564 4</b>	<b>0.592 0</b>	<b>0.974 8</b>	<b>0.573 2</b>

致性信息；设计增广拉格朗日乘子法框架实现高效求解。实验结果表明，该算法在聚类性能上显著优于其他主流模型。

### 3.5 消融实验

为了深入研究该算法，本文进行了一项消融研究，去噪以及成对相似性思想是两个关键点。因此，本文设计了两种变体方法：无成对相似性理论版本，即没有捕获视图间的一致性信息；无

滤波器版本，即没有考虑将原始数据进行平滑去噪。其中无滤波器版本比无成对相似性理论版本效果要好，但这两种变体都无法实现良好的聚类性能，本文所提算法的实验结果也证明了这一点。消融实验结果见表5。

### 3.6 参数敏感性分析

对于本文所提算法，有 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$ 3个参数需要调整。BRCA数据集上的参数分析如图2所示，

表5 消融实验结果

数据集	滤波器	成对相似性	ACC	NMI	F-score
CESC	√		0.669 4	0.375 8	0.533 6
		√	0.709 7	0.338 6	0.591 3
YALE32	√	√	<b>0.862 9</b>	<b>0.591 4</b>	<b>0.763 0</b>
			0.903 0	0.974 2	0.913 3
		√	0.915 2	0.910 7	0.830 0
3sources	√	√	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
			0.674 6	0.639 1	0.619 0
Washington	√	√	0.727 8	0.542 8	0.614 2
			<b>0.881 7</b>	<b>0.756 4</b>	<b>0.800 6</b>
		√	0.504 3	0.206 9	0.437 1
BRCA	√	√	0.530 4	0.249 0	0.462 1
			<b>0.621 7</b>	<b>0.356 9</b>	<b>0.564 4</b>
		√	0.673 4	0.395 5	0.537 3
BDGP	√	√	0.638 2	0.360 7	0.533 4
			<b>0.733 7</b>	<b>0.455 8</b>	<b>0.592 0</b>
Cora	√	√	0.902 4	0.810 7	0.927 8
			0.973 6	0.921 0	0.948 5
		√	<b>0.987 6</b>	<b>0.959 6</b>	<b>0.974 8</b>
	√	√	0.563 1	0.363 2	0.387 3
			0.652 9	0.419 8	0.490 3
	√	√	<b>0.714 9</b>	<b>0.520 0</b>	<b>0.573 2</b>

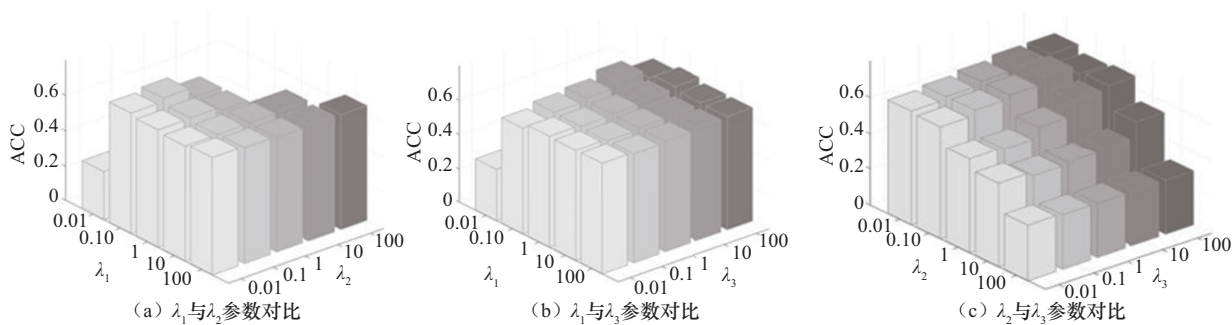


图2 BRCA数据集上的参数分析

Washington数据集上的参数分析如图3所示。图2、图3展示了3个参数在不同数值上对ACC的影响，这表明适度的参数值通常有利于各种数据集上的聚类性能。 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$ 对应于目标函数正则化项以获得最佳聚类性能。可以观察到，这两个数据集对3个参数有一定的敏感性。对于Washington来说，当 $\lambda_1=100$ 、 $\lambda_2=10$ 、 $\lambda_3=10$ 时ACC取

得最大值。

### 3.7 收敛性分析

为了验证算法的收敛性能，图4展示了本文所提算法在7个数据集上的收敛曲线，从图4可以看出，尽管算法在不同的数据集上收敛次数有差别，但基本都在20~25次迭代后表现出收敛的趋势，这证实了本文所提算法的快速收

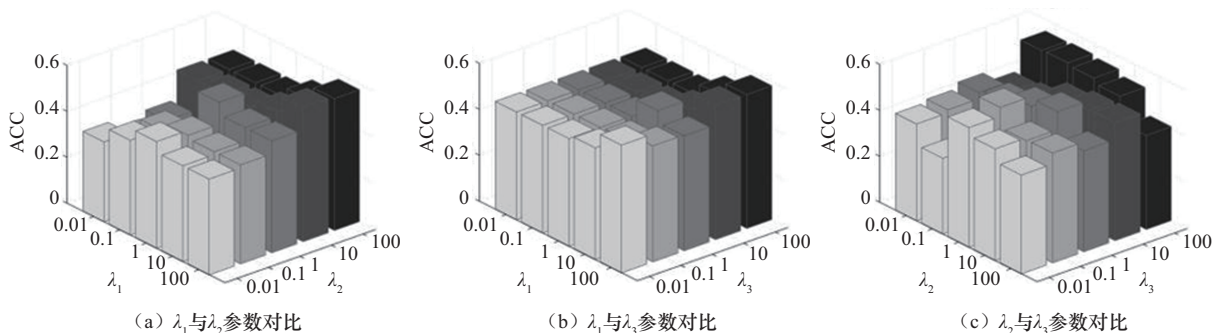


图3 Washington数据集上的参数分析

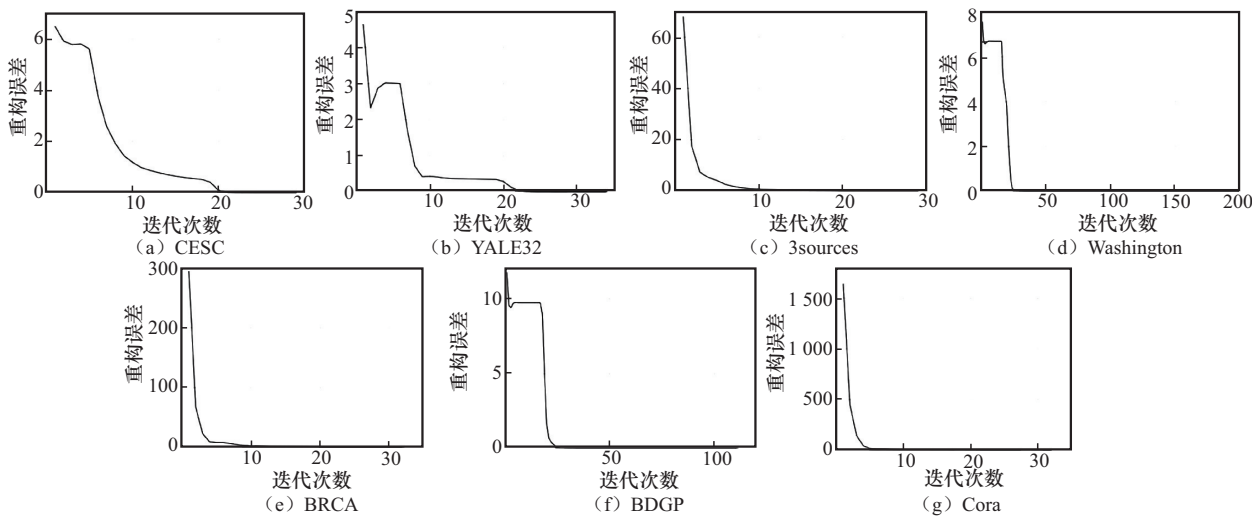


图4 本文所提算法在7个数据集上的收敛曲线



敛特性。

### 3.8 可视化分析

为了进一步展示算法的聚类性能，本文添加了数据集样本可视化分析。图5展示了BDGP数据集可视化；图6展示了YALE32数据集可视化。本文所提算法在其中两个数据集上展示了良好的聚类结果。具体来说，不同类别的样本点相距很远，而同一类别的点非常接近。其中，图5、图6的横、纵坐标无具体物理含义，仅代表高维数据在低维空间中的相对位置关系。

### 3.9 去噪效果量化分析

为了系统地评估算法在去噪方面的表现，本文基于一阶微分算子法<sup>[36]</sup>对数据的局部结构变化

进行量化分析。

#### 3.9.1 噪声抑制能力评估

为了评估该算法对数据结构特征的影响，本文采用基于一阶微分算子的梯度幅值分布直方图，从统计角度考察去噪前后数据结构的变化趋势。图7、图8分别展示了CESC和3sources数据集去噪前后梯度幅值直方图对比，其中原始数据生成的直方图表示去噪前状态（如图7（a）、图8（a）所示），最终亲和矩阵生成的直方图表示去噪后状态（如图7（b）、图8（b）所示）。直方图横坐标表示数据空间中各点的边缘强度或变化幅度，纵坐标则对应具有某一特定梯度幅值的点的数量。以CESC数据集为例，图7（a）显示去噪前

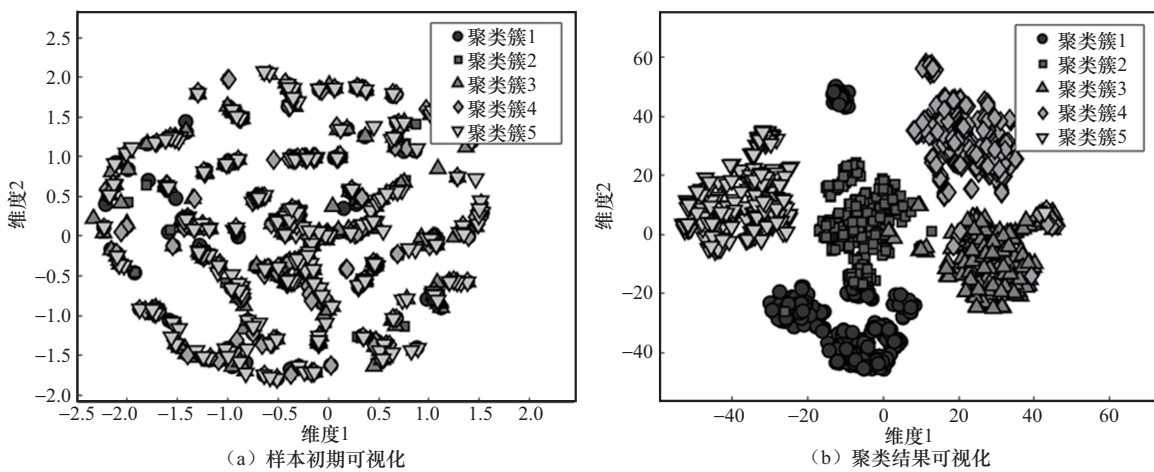


图5 BDGP数据集可视化

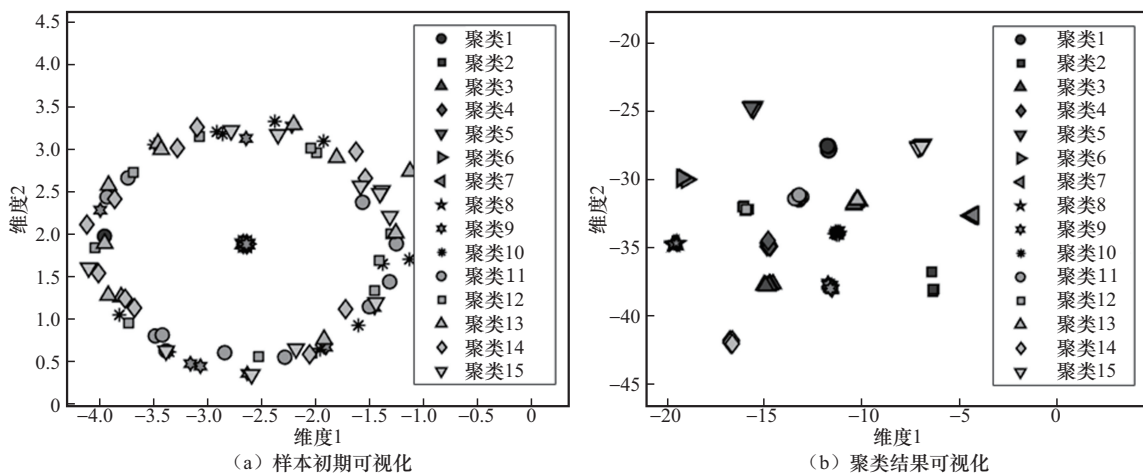


图6 YALE32数据集可视化

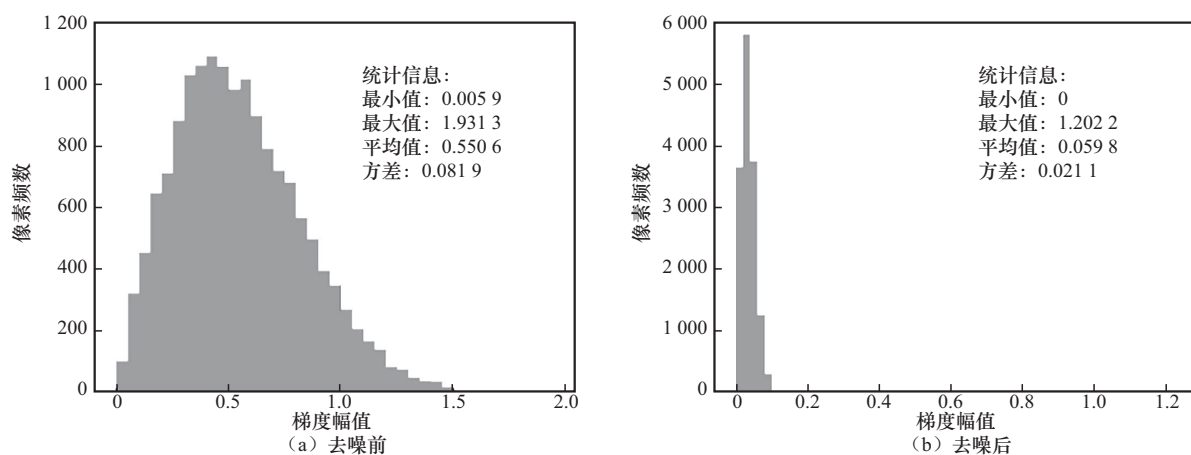


图7 CESC数据集去噪前后梯度幅值直方图对比

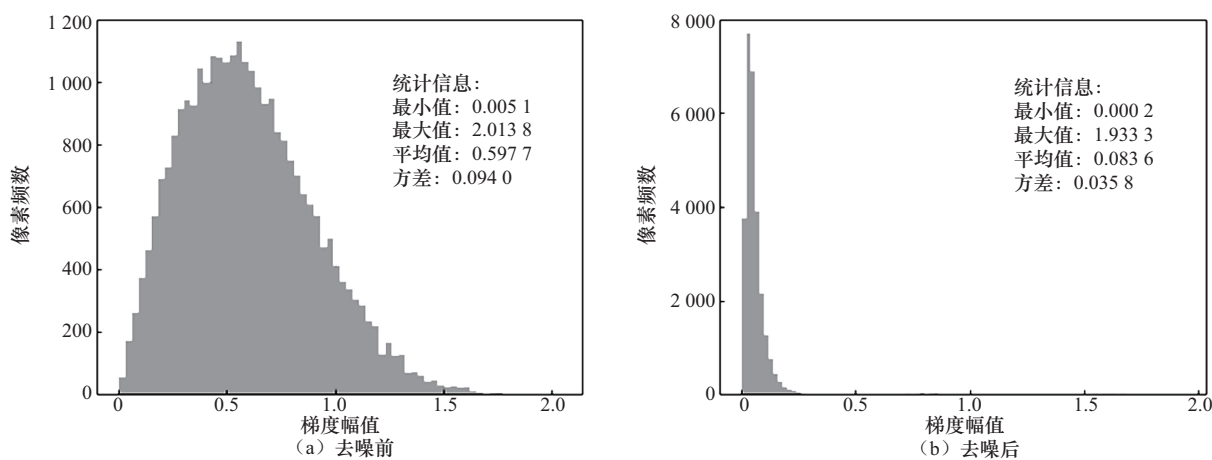


图8 3sources数据集去噪前后梯度幅值直方图对比

的主峰集中在0.4~0.6，方差为0.0819，反映出较高的结构多样性。图7(b)则呈现出去噪后的分布特征，梯度结构发生明显演变：最小值归零，说明平坦区域被充分均匀化；最大值下降至1.2022（下降37.7%），表明高梯度区域被压缩但关键边缘仍得以保留；主峰左移至0.05~0.10，均值下降至0.0598（下降89.1%），说明高频噪声成分被大幅抑制；方差下降至0.0211（下降74.2%），显示梯度分布集中度显著提升。

综上所述，本算法在显著降低随机噪声影响的同时，能够有效保留关键结构边界，具备良好的结构保持能力。3sources数据集梯度统计量对比分析见表6。表6进一步验证了该模型的稳定性与普适性，其梯度幅值分布在去噪前后亦表现出与

CESC数据集一致的变化趋势，说明算法对不同类型数据均具备出色的结构优化与噪声抑制能力。

表6 3sources数据集梯度统计量对比分析

评估指标	去噪前值	去噪后值	变化率
最小值	0.0051	0.0002	-96.08%
最大值	2.0138	1.9333	-4.00%
平均值	0.5977	0.0836	-86.01%
方差	0.0940	0.0358	-61.91%

### 3.9.2 多噪声强度下的鲁棒性分析

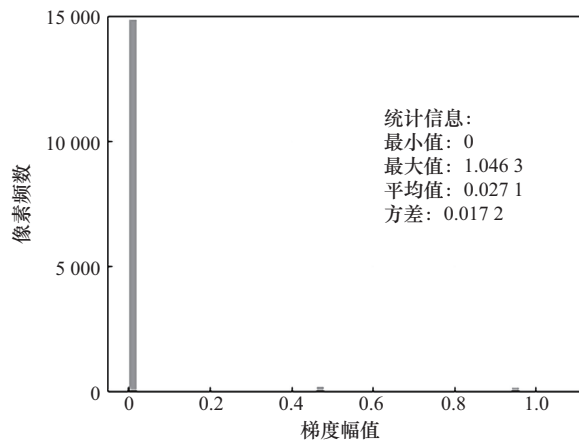
为了评估该算法在不同噪声强度下的鲁棒性，本文在原始数据上主动叠加高斯噪声，并观察去噪后的梯度幅值分布变化。噪声强度用标准差 $\sigma$ 表示，本文实验设置 $\sigma$ 分别为0.1、0.3，对应的噪声模型如下：



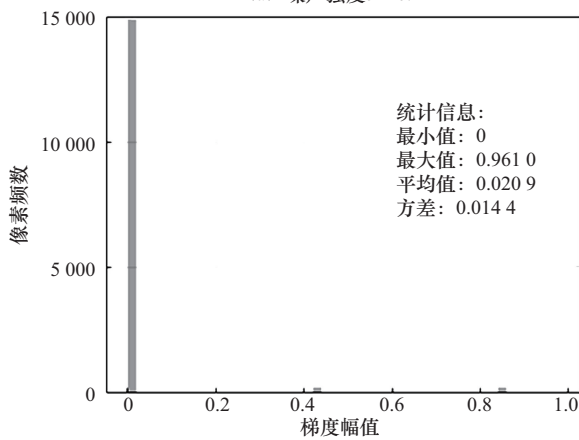
$$\mathbf{X}_{\text{noisy}} = \mathbf{X} + N(0, \sigma^2) \quad (35)$$

其中,  $\mathbf{X}_{\text{noisy}}$  表示加入噪声后的数据,  $\mathbf{X}$  表示原始数据,  $N(0, \sigma^2)$  表示均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的高斯噪声, 即噪声为不偏倚的随机扰动, 强度由  $\sigma$  控制。

图 9、图 10 分别展示了 CESC 和 3sources 数据集在不同噪声强度下的去噪后梯度幅值直方图。当  $\sigma=0$  时, 梯度幅值分布如图 7 (b) 所示, 即没有主动添加噪声的去噪后梯度幅值分布直方图。对比图 7 (b) 与图 9 (b): 梯度均值从 0.059 8 降至 0.020 9, 降幅达 65.1%; 方差从 0.021 1 降至 0.014 4, 降幅达 31.8%。特别值得注意的是, 即使在较高噪声水平 ( $\sigma=0.3$ ) 下, 算法仍能维持 0.020 9 的梯度均值, 表明其具有较强的鲁棒性。

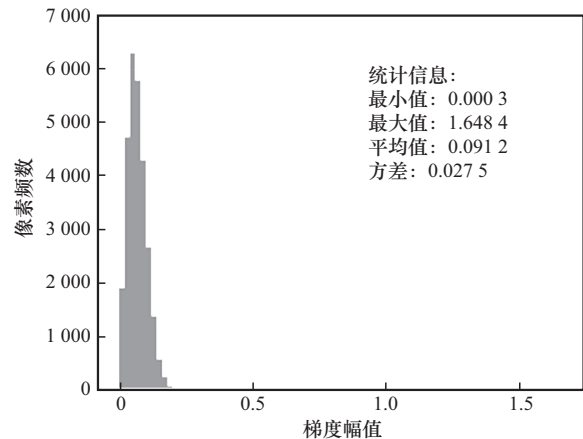


(a) 噪声强度  $\sigma = 0.1$

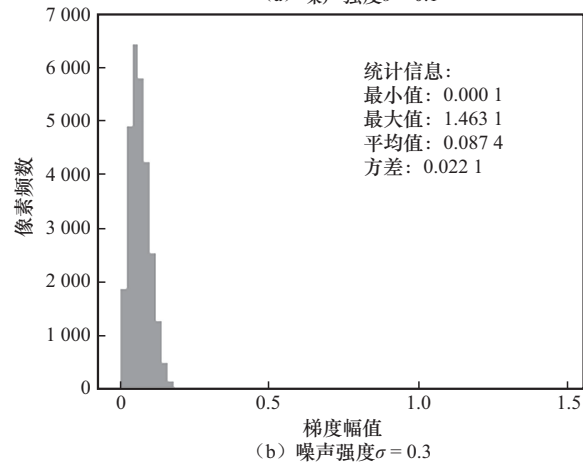


(b) 噪声强度  $\sigma = 0.3$

图 9 CESC 数据集在不同噪声强度下的去噪后梯度幅值直方图



(a) 噪声强度  $\sigma = 0.1$



(b) 噪声强度  $\sigma = 0.3$

图 10 3sources 数据集在不同噪声强度下的去噪后梯度幅值直方图

## 4 结束语

本文所提算法是一种低秩MVSC方法, 首先通过滤波器进行平滑处理, 其次使用矩阵分解来获取视图的低秩结构, 从而获得更加清晰、低秩的亲矩阵, 然后引入成对相似性思想来捕获视图间一致性信息, 最后应用谱聚类来检测底层的聚类结构。在 7 个数据集上的实验表明, 本文所提方法显著优于现有传统多视图聚类算法。尽管深度学习在特征融合与跨模态对齐方面展现出非凡能力, 但高资源需求限制了其在某些实际应用中的推广。为此, 笔者计划在延续本文低秩优化思想的基础上, 引入轻量化深度结构, 与传统矩阵分解方法融合, 以提升模型在资源受限场景下

的适应性；同时考虑借助图神经网络建模视图间更复杂的结构关系，进一步增强多视图信息的表达与传递能力。

## 参考文献：

- [1] Zhao J, Xie X J, Xu X, et al. Multi-view learning overview: Recent progress and new challenges[J]. *Information Fusion*, 2017, 38: 43-54.
- [2] Bickel S, Scheffer T. Multi-view clustering[C]//*Proceedings of the Fourth IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'04)*. Piscataway: IEEE Press, 2004: 19-26.
- [3] Yang Y, Wang H. Multi-view clustering: a survey[J]. *Big Data Mining and Analytics*, 2018, 1(2): 83-107.
- [4] Wang Y D, Pei X B, Zhan H X. Fine-grained graph learning for multi-view subspace clustering[J]. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2024, 8(4): 2804-2815.
- [5] Hu B, Wu T, Han L X, et al. Multi-view clustering via view-specific consensus kernelized graph learning[J]. *Neurocomputing*, 2025, 633: 129766.
- [6] Tang C, Zhu X Z, Liu X W, et al. Learning a joint affinity graph for multiview subspace clustering[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2019, 21(7): 1724-1736.
- [7] Chen Y Y, Wang S Q, Zhao Y P, et al. Double discrete cosine transform-oriented multi-view subspace clustering[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2024, 33: 2491-2501.
- [8] Wang H, Yang Y, Liu B. GMC: graph-based multi-view clustering[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2020, 32(6): 1116-1129.
- [9] Tang C, Liu X W, Zhu X Z, et al. CGD: multi-view clustering via cross-view graph diffusion[J]. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2020, 34(4): 5924-5931.
- [10] Tsai J T, Lin Y, Liao H M. Per-cluster ensemble kernel learning for multi-modal image clustering with group-dependent feature selection[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2014, 16(8): 2229-2241.
- [11] Chen Y Y, Xiao X L, Zhou Y C. Jointly learning kernel representation tensor and affinity matrix for multi-view clustering[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2020, 22(8): 1985-1997.
- [12] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering[C]//*Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Piscataway: IEEE Press, 2009: 2790-2797.
- [13] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: algorithm, theory, and applications[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(11): 2765-2781.
- [14] Liu G C, Lin Z C, Yan S C, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(1): 171-184.
- [15] Liu G C, Lin Z C, Yu Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation[C]//*Proceedings of the 27th International Conference On Machine Learning (ICML-10)*. New York: ACM Press, 2010: 663-670.
- [16] Wang Y, Lin X M, Wu L, et al. Robust subspace clustering for multi-view data by exploiting correlation consensus[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(11): 3939-3949.
- [17] Gao H C, Nie F P, Li X L, et al. Multi-view subspace clustering[C]//*Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. Piscataway: IEEE Press, 2015: 4238-4246.
- [18] Cao X C, Zhang C Q, Fu H Z, et al. Diversity-induced multi-view subspace clustering[C]//*Proceedings of the 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Piscataway: IEEE Press, 2015: 586-594.
- [19] Yin Q Y, Wu S, He R, et al. Multi-view clustering via pairwise sparse subspace representation[J]. *Neurocomputing*, 2015, 156: 12-21.
- [20] Kang Z, Zhou W T, Zhao Z T, et al. Large-scale multi-view subspace clustering in linear time[J]. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2020, 34(4): 4412-4419.
- [21] Sun M J, Zhang P, Wang S W, et al. Scalable multi-view subspace clustering with unified anchors[C]//*Proceedings of the 29th ACM International Conference on Multimedia*. New York: ACM Press, 2021: 3528-3536.
- [22] Kan Y Z, Lu G F, Yao L, et al. Multi-view clustering using a flexible and optimal multi-graph fusion method[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2024, 128: 107452.
- [23] Cai R G, Chen H M, Mi Y, et al. Multi-view clustering via double spaces structure learning and adaptive multiple projection regression learning[J]. *Information Sciences*, 2025, 688: 121396.
- [24] Candès E J, Li X D, Ma Y, et al. Robust principal component analysis?[J]. *Journal of the ACM*, 2011, 58(3): 1-37.
- [25] Yang J F, Yin W T, Zhang Y, et al. A fast algorithm for edge-preserving variational multichannel image restoration[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 569-592.
- [26] Jameson A. Solution of the equation  $AX + XB = C$  by inversion of an  $M \times M$  or  $N \times N$  matrix[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1968, 16(5): 1020-1023.
- [27] Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(11): 1330-1334.
- [28] Cai J F, Candès E J, Shen Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956-1982.



- [29] Zhan K, Nie F P, Wang J, et al. Multiview consensus graph clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(3): 1261-1270.
- [30] Yin H W, Wang G X, Hu W J, et al. Fine-grained multi-view clustering with robust multi-prototypes representation[J]. Applied Intelligence, 2023, 53(7): 8402-8420.
- [31] Zou X, Tang C, Zheng X, et al. Inclusivity induced adaptive graph learning for multi-view clustering[J]. Knowledge-Based Systems, 2023, 267: 110424.
- [32] Wang J, Tang C, Wan Z G, et al. Efficient and effective one-step multiview clustering[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2024, 35(9): 12224-12235.
- [33] Wang D, Han S W, Wang Q, et al. Pseudo-label guided collective matrix factorization for multiview clustering[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(9): 8681-8691.
- [34] Cai B, Lu G F, Ji G Y, et al. Complete multi-view subspace clustering via auto-weighted combination of visible and latent views[J]. Information Sciences, 2024, 665: 120381.
- [35] You X J, Li H R, You J L, et al. Consider high-order consistency for multi-view clustering[J]. Neural Computing and Applications, 2024, 36(2): 717-729.
- [36] Du Y F, Lu G F. Joint local smoothness and low-rank tensor representation for robust multi-view clustering[J]. Pattern Recognition, 2025, 157: 110944.

#### [作者简介]



张天啸 (1999-), 男, 湖州师范学院信息工程学院硕士生, 主要研究方向为多视图学习。



张永 (1975-), 男, 博士, 湖州师范学院信息工程学院教授, 主要研究方向为深度学习、机器学习。



刘文哲 (1989-), 女, 博士, 湖州师范学院信息工程学院讲师, 主要研究方向为多视图、多模态学习。